# Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume

**1. Aufgabe:**

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Berechne die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume der Matrizen $A$, $A^2$ und $A^{-1}$. Berechne weiter die Spuren und die Determinanten der Matrizen $A$, und $A^2$ mit Hilfe der Eigenwerte.

*Proof.* Die Eigenwerte ergeben sich wie folgt:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0.$$

Somit ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$. Daraus ergeben sich die Eigenwerte von $A^2$ zu $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 9$ und von $A^{-1}$ zu $\lambda_1 = 1$ sowie $\lambda_2 = \frac{1}{3}$. Weiter gilt

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 3 = 4, \quad \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 3$$

und analog $\operatorname{tr}(A^2) = 1 + 9 = 10$, $\det(A^2) = 9$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{3}$.
Für die Eigenvektoren lösen wir folgende lineare Gleichungssysteme:

$$\lambda_1 = 1: \quad (A - I)x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = (0,0), \qquad \lambda_2 = 3: \quad (A - 3I)x = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x = (0,0).$$

Offensichtlich ergeben sich $x = (1,1)$ als Eigenvektor für $\lambda_1 = 1$ und $x = (1,-1)$ als Eigenvektor für $\lambda_2 = 3$. Die Eigenvektoren für $A^2$ und $A^{-1}$ sind die selben wie für $A$ nur mit analogen Eigenwerten. Als Eigenräume ergeben sich

$$\operatorname{Eig}_1(A) = \{(x,x) | x \in \mathbb{R}\}, \quad \operatorname{Eig}_3(A) = \{(x,-x) | x \in \mathbb{R}\}$$

aufgrund der Dimensionsformel. □

**2. Aufgabe:**

Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

*Proof.* Wir bestimmen die Eigenwerte mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und dem Laplaceschen Entwicklungssatz nach der dritten Zeile:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda - 2) - 2(\lambda - 1)$$

$$= (\lambda-1)((\lambda-1)(\lambda-2)-2) = (\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-3).$$

Somit ergeben sich die Nullstellen, und damit die Eigenwerte, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 3$.
Die dazugehörigen Eigenvektoren ergeben sich durch das Lösen folgender Gleichungssysteme:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x = 0, \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} x = 0.$$

Sei $x = (x_1, x_2, x_3)$. Exemplarisch untersuchen wir das erste Gleichungssystem:

$$x_1 = x_2, \quad x_2 = x_3, \quad x_2 = x_3.$$

Somit ergibt sich ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ durch $x = (1, 1, 1)$. Analog erhält man die Eigenvektoren $x = (-1, 0, 1)$ für $\lambda_2 = 1$ und $x = (1, -2, 1)$ für $\lambda_3 = 3$.
Für die zweite Matrix ergibt sich

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 \\ -4 & \lambda+1 \end{pmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+1) + 8 = \lambda^2 - 2\lambda + 5.$$

Die Nullstellen dieses charakteristischen Polynoms sind daher $1 \pm 2\mathrm{i}$. Wir lösen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2+2\mathrm{i} & 2 \\ -4 & 2+2\mathrm{i} \end{pmatrix} x = 0.$$

Damit ergeben sich die Gleichungen

$$2(\mathrm{i}-1)x_1 + 2x_2 = 0, \quad -4x_1 + 2(1+i)x_2 = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x_2 = (1-i)x_1$ und das in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt $-4x_1+4x_1 = 0$, was zur Folge hat, dass $x_1$ frei wählbar ist. Somit ist $c \cdot (1, (1-i))$ mit $c \in \mathbb{R}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1 + 2\mathrm{i}$. Analog erhält man $c \cdot (1, (1+i))$ als ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 1 - 2\mathrm{i}$. □

## 3. Aufgabe:

Wahr oder falsch?

1. Falls eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ den Eigenwert $\lambda = 0$ hat, so ist $A$ injektiv.
2. Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind immer orthogonal zueinander.
3. Die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A$ und $A^T$ sind identisch.
4. Falls eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ den Eigenwert $\lambda = 0$ hat, so ist $\det A = 0$.
5. Falls eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ genau $n$ unterschiedliche Eigenwerte hat, so ist $A$ diagonalisierbar.
6. Sind $\lambda_1$ und $\lambda_2$ Eigenwerte von $A$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ so gilt $\mathrm{Eig}_{\lambda_1}(A) \cap \mathrm{Eig}_{\lambda_2}(A) = \{0\}$.
7. Gilt $\det A = 0$ für eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, so ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von $A$.
8. Falls eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ genau $n$ unterschiedliche Eigenwerte hat, so ist $A$ bijektiv.

*Proof.* Alle Aussagen klären sich direkt mit Sätzen aus der Vorlesung oder mit den Beispielen aus den Aufgaben 1 und 2. □

**4. Aufgabe:**

Berechne die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Berechne darüber hinaus die Inverse Matrix $A^{-1}$ und $A^{1000}$.

*Proof.* Das charakteristische Polynom ergibt sich mit den üblichen Methoden zu $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda+1)\cdot(\lambda-5)$. Damit erhalten wir die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 5$ und die Determinante von $A$ durch $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -5$. Somit folgt die inverse Matrix $A^{-1}$ mit der üblichen Regel:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Matrix $A^{1000}$ zu bestimmen berechnen wir die Eigenvektoren von $A$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x = 0, \quad \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x = 0.$$

Somit ist $(-2, 1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-1$ und $(1, 1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 5. Damit ergibt sich die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

indem man spaltenweise die Eigenvektoren eingibt. Somit folgt die Diagonalisierung

$$A = S * \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} * S^{-1}$$

und insgesamt

$$\begin{aligned} A^{1000} &= S * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{1000} \end{pmatrix} * S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{1000} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 5^{1000} \\ 1 & 5^{1000} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^{1000}+2 & 2\cdot(5^{1000}-1) \\ 5^{1000}-1 & 1+2\cdot 5^{1000} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

**5. Aufgabe:**

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\lambda_1, \lambda_2$ die Eigenwerte von $A$. Beweise die Formeln

$$a + d = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = ad - bc.$$

*Bemerkung:* Damit ist die Spur einer 2x2 Matrix gleich der Summe der Eigenwerte und die Determinante gleich dem Produkt der Eigenwerte.

*Proof.* Wir bestimmen allgemein das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind mit der $p, q-$Formel genau

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} - (ad - bc)}.$$

Somit ergibt sich die Summe und das Produkt der beiden Eigenwerte:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{(a+d)^2}{4} - (ad - bc)\right) = ad - bc$$

□

**6. Aufgabe:**

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ habe die Eigenwerte 0,1 und 2. Bestimme:

1. den Rang von $A$,
2. die Determinante von $A^T * A$,
3. die Eigenwerte von $A^T$,
4. die Spur von $A$, $A^T$ und $A + A^T$.

*Proof.* Da 0 ein Eigenwert von $A$ ist und $A$ 3 verschiedene Eigenwerte besitzt, hat $A$ den Rang 2. Die Determinante von $A * A^T$ ist gleich der Determinante von $A^2$ und damit 0 als Produkt der quadrierten Eigenwerte. Die Eigenwerte von $A^T$ sind gleich den Eigenwerten von $A$ und damit $0, 1$ und 2. Die Spur von $A$ ist 3 und dies entspricht der Spur von $A^T$. Somit folgt, dass die Spur der Matrix $A + A^T$ genau 6 ist. □

**7. Aufgabe:**

Bestimme $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & d & e \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte 4 und 7 für $A$ sowie $1, 2$ und 3 für $C$ haben.

*Proof.* Für die charakteristischen Polynome ergibt sich

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - b \cdot \lambda - a, \quad \det(\lambda I - C) = \lambda^3 - e \cdot \lambda^2 - d \cdot \lambda - c.$$

Damit sich die gesuchten Eigenwerte ergeben müssen wir also folgende Gleichungssysteme lösen:

$$\begin{aligned} 16 - 4b - a &= 0 \\ 49 - 7b - a &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 - e - d - c &= 0 \\ 8 - 4e - 2d - c &= 0 \\ 27 - 9e - 3d - c &= 0 \end{aligned}$$

Aus dem ersten System ergibt sich demnach $b = 11$ und $a = -28$. Analog folgt mit der Gleichunsrechnung $I + III - 2II$ $e = 6$, $d = -11$ und $c = 6$. □

# Die symmetrische Gruppe und Determinanten

**1. Aufgabe:**

Gegeben seien $\sigma_1, \sigma_2 \in S_7$ durch

$$\sigma_1 = [1\ 2\ 5\ 4\ 7\ 3\ 6] \quad \sigma_2 = [2\ 1\ 7\ 4\ 6\ 3\ 5]$$

**a)** Wie viele Elemente enthält $S_7$? Antwort: $7! = 5040$

**b)** Gib $\sigma_1(2)$, $\sigma_2(3)$, $(\sigma_2 \circ \sigma_1)(5)$ sowie $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(5)$ an.

**c)** Gib $\sigma_1 \circ \sigma_2$ und $\sigma_2 \circ \sigma_1$ an!

**d)** Gib das Inverse von $\sigma_1$ an!

**e)** Bestimme nachvollziehbar $\operatorname{sgn}(\sigma_1)$, $\operatorname{sgn}(\sigma_2)$ und $\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2)$.

**Lösung:**

**a)** Die symmetrische Gruppe $S_7$ enthält $7! = 5040$ Elemente.

**b)** Es ist $\sigma_1(2) = 2, \sigma_2(3) = 7, (\sigma_2 \circ \sigma_1)(5) = \sigma_2(\sigma_1(5)) = \sigma_2(7) = 5, (\sigma_1 \circ \sigma_2)(5) = \sigma_1(\sigma_2(5)) = \sigma_1(6) = 3$

**c)** Es ist $\sigma_1 \circ \sigma_2 = [2\ 1\ 6\ 4\ 3\ 5\ 7]$ und $\sigma_2 \circ \sigma_1 = [2\ 1\ 6\ 4\ 5\ 7\ 3]$

**d)** Es ist $(\sigma_1)^{-1} = [1\ 2\ 6\ 4\ 3\ 7\ 5]$

**e)** $\sigma_1$ hat 5 Fehlstände: $(3,4), (5,6), (3,6), (4,6), (5,7)$. Somit ist $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = (-1)^5 = -1$. $\sigma_2$ hat 8 Fehlstände: $(1,2), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,6), (5,6), (5,7)$. Somit ist $\operatorname{sgn}(\sigma_2) = 1$. Weiter ist $\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_1) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1$.

**2. Aufgabe:**

Laut Vorlesung lässt sich jede Permutation $\sigma \in S_n$ als Produkt von Transpositionen schreiben.

**a)** Schreibe $\sigma \in S_4$ gegeben durch $[2\ 4\ 3\ 1]$ als Produkt von Transpositionen!

**b)** Zeige: Es gilt $\operatorname{sgn} \sigma = 1$ genau dann, wenn $\sigma$ das Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen ist.

**Lösung:**

**a)** Es ist $\sigma = [4\ 2\ 3\ 1] \circ [2\ 1\ 3\ 4]$

**b)** Sei $\sigma \in S_n$. Nach Vorlesung lässt sich $\sigma$ als Produkt von Transpositionen schreiben. Seien also $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ Transpositionen mit $\sigma = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_k$.

Es gelte zunächst $\operatorname{sgn} \sigma = 1$. Dann ist

$$1 = \operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn}(\sigma_1) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma_2) \cdot \ldots \cdot \operatorname{sgn}(\sigma_k)$$

Nach Vorlesung gilt für jede Transposition $\sigma_i$: $\operatorname{sgn}\sigma_i = -1$. Somit folgt $1 = (-1)^k$ und $k$ muss eine gerade Zahl sein.

Ist umgekehrt $k$ eine gerade Zahl, so folgt $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^k = 1$.

**3. Aufgabe:**

Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen möglichst geschickt!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**Lösung:** Mit der Regel von Sarrus erhält man $\det A = -52$. Mit der Kästchenregel erhält man $\det B = -50$. Durch Entwicklung nach der zweiten Zeile erhält man: $\det C = -14$.

**4. Aufgabe:**

Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine Dreiecksmatrix. Beweise mit dem Entwicklungssatz von Laplace, dass für die Determinante gilt:

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

**Lösung:** Sei o.B.d.A. $A$ eine obere Dreiecksmatrix. Entwicklung nach der ersten Spalte von $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ liefert:

$$\det A = a_{11} \cdot \det A(1,1)$$

denn für alle $a_{i1}$ mit $i > 1$ gilt: $a_{i1} = 0$. Die Streichmatrix $A(1,1)$ ist ebenfalls wieder eine Dreiecksmatrix. Setze $A_1 := A(1,1)$. Entwickelt man wieder nach der ersten Spalte, so erhält man

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot A_1(1,1)$$

wobei $A_1(1,1)$ wieder eine obere Dreiecksmatrix ist. Führt man dies n-mal durch, so erhält man

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots a_{nn}$$

Tipp: Durch vollständige Induktion erhält man einen schöneren Beweis.

**5. Aufgabe:**

Bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die die unten stehende Matrix $A \in \mathbb{R}^4$ invertierbar ist und bestimme in diesen Fällen die Inverse mit Hilfe von Minoren.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung:** Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich Null ist. Wir berechnen zunächst die Determinante von $A$:

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - a^2$$

Dies ist genau dann Null, wenn $a \in \{1, -1\}$. Somit ist $A$ genau dann invertierbar, wenn $a \notin \{1, -1\}$. Für die Inverse erhält man dann (auf den Lösungsweg wird hier verzichtet):

$$A^{-1} = \frac{1}{1-a^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ -a & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & -a+a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

## 6. Aufgabe:

Bestimme die Lösungsmenge des folgenden Linearen Gleichungssystems mit der Cramer'schen Regel!

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

**Lösung:** Die Lösungsmenge lautet

$$\{\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 48 \\ -12 \\ 60 \end{pmatrix}\}$$

Lösungsweg:

$$\det(\mathbf{A}) = \det\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 5 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -4 - 12 + 15 + 6 - 8 + 15 = 12$$

$$\det(\mathbf{A}_1) = \det\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 8 + 24 + 6 - 12 + 16 + 6 = 48$$

$$\det(\mathbf{A}_2) = \det\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 4 - 16 - 30 - 6 + 16 + 20 = -12$$

$$\det(\mathbf{A}_3) = \det\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -8 + 6 + 20 + 8 + 4 + 30 = 60$$

Also

$$x_1 = \frac{48}{12} = 4, x_2 = -\frac{12}{12} = -1, x_3 = \frac{60}{12} = 5.$$

## 7. Aufgabe:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det A = 2021$. Welche Aussagen sind richtig?

- ☹ $r(A) = 0$
- ☑ Die Lösungsmenge des LGS $A \cdot x = o$ mit $x \in \mathbb{R}^3$ lautet $\{o\}$.
- ☑ Ist $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein Endomorphismus mit der Darstellungsmatrix $A$, so ist $f$ bijektiv.
- ☑ Die Matrix $A$ ist invertierbar.
- ☑ Das Produkt von $A$ und einer invertierbaren Matrix $B \in \mathbb{R}^3$ ist invertierbar.

# (Charakteristische) Polynome

**1. Aufgabe:**

Bestimme für folgende Polynome $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ jeweils Polynome $S, R \in \mathbb{R}[X]$ mit $\deg(R) < \deg(Q)$, sodass gilt:

$$P = Q \cdot S + R.$$

(i) $P = X^3 - 3X^2 + 5$ und $Q = X^2 - 4X + 3$.

(ii) $P = 2X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 3$ und $Q = X^2 + X + 1$.

(iii) $P = 7X^5 - 21X^4 + 47X^3 - 3X + 4$ und $Q = X^3 - 3X^2$.

*Lösung:* Das Zauberwort ist hier: Polynomdivision. Wir führen diese einmal explizit durch, für die anderen Polynome werden nur die Ergebnisse angegeben.

(i) Führe folgende Polynomdivision aus:

$$\begin{array}{l} \big( \quad x^3 - 3x^2 \qquad\quad + 5\big) : \big(x^2 - 4x + 3\big) = x + 1 + \dfrac{x+2}{x^2 - 4x + 3} \\ \underline{\; - x^3 + 4x^2 - 3x \;} \\ \qquad\qquad\quad x^2 - 3x + 5 \\ \qquad\quad\; \underline{\; - x^2 + 4x - 3 \;} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x + 2 \end{array}$$

Das heiSSt wir erhalten

$$x^3 - 3x^2 + 5 = (x^2 - 4x + 3)\underbrace{(x+1)}_{=:S} + \underbrace{(x+2)}_{=:R}.$$

(ii) Es gilt

$$2x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 3 = (x^2 + x + 1)(2x^2 - 2).$$

Hier ist also $R = 0$ und $S = 2x^2 - 2$.

(iii) Hier ergibt eine Polynomdivision

$$7x^5 - 21x^4 + 47x^2 - 3x + 4 = (x^3 - 3x^2)\underbrace{(7x^2 - 15)}_{=:S} + \underbrace{(2x^2 - 3x + 4)}_{=:R}.$$

**2. Aufgabe:**

Wir betrachten das Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ gegeben durch

$$P = (-2\sqrt{2},\, 2(1+\sqrt{2}),\, -(2+\sqrt{2}),\, 1,\, 0,\, ,\, ...).$$

a) Welche Nullstellen hat $P$ in $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$? Hinweis: $1 + i$ ist eine Nullstelle von $P$.

b) Ist $P$ irreduzibel als Polynom in $\mathbb{R}[X]$ oder $\mathbb{C}[X]$?

c) Gib eine Zerlegung von $P$ in irreduzible Polynome über $\mathbb{R}$ an. Ist diese eindeutig bestimmt? Falls nicht, gib eine weitere solche Zerlegung an.

*Lösung:* Als erstes schreiben wir das als Folge gegebene Polynom in die Form mit $X$ um, das heiSSt der erste Eintrag der Folge wird der Koeffizient vor $X^0$, der nächste steht vor $X^1$ usw.:

$$P = X^3 - (2+\sqrt{2})X^2 + 2(1+\sqrt{2})X - 2\sqrt{2}.$$

Als Hinweis war ja schon eine Nullstelle gegeben, wir wissen also, dass das Polynom $Q := (X - (1 + \mathrm{i}))$ ein Teiler von $P$ ist. Eine Polynomdivision durch $Q$ ist möglichund liefert im Endeffekt auch das korrekte Ergebnis, bei einer Polynomdivision mit komplexen Koeffizienten muss man aber sehr aufpassen, sich nicht zu verrechnen. Einfacher ist folgendes Vorgehen:
$P$ ist ein Polynom mit reellen Koeffizienten, das eine echt komplexe Nullstelle hat. Aus Übungsserie 18 wissen wir, dass dann auch das komplex-konjugierte, also $(1 - \mathrm{i})$ eine Nullstelle ist. Wir könnten also zwei Polynomdivisionen, einmal durch $Q$ und einmal durch $T := (X - (1 - \mathrm{i}))$, durchführen, einfacher ist aber, direkt durch $T \cdot Q = X^2 - 2X + 2$ zu teilen. Die Polynomdivision ergibt hier:

$$P = (X^2 - 2X + 2)(X - \sqrt{2}).$$

Hieran können wir dann noch die dritte Nullstelle $\sqrt{2}$ ablesen.
Insgesamt haben wir also gefunden: $P$ hat

1. keine Nullstellen in $\mathbb{Q}$.
2. in $\mathbb{R}$ nur die Nullstelle $\sqrt{2}$.
3. in $\mathbb{C}$ die Nullstellen $\sqrt{2}$, $1 + \mathrm{i}$ und $1 - \mathrm{i}$.

zu b): $P$ ist weder irreduzibel in $\mathbb{R}[X]$ noch in $\mathbb{C}[X]$, denn wir haben mit 2 eine Zerlegung in nicht-konstante Polynome angegeben. Diese ist sowohl eine Zerlegung in $\mathbb{R}[X]$ als auch in $\mathbb{C}[X]$.
zu c): Zerlegung 2 ist bereits eine solche Zerlegung, denn $(X - \sqrt{2})$ und $(X^2 - 2X + 2)$ sind irreduzible Polynome in $\mathbb{R}[X]$.
Für $A := (X^2 - 2X + 2)$ folgt das aus Übungsserie 19, Aufgabe 3, denn $\deg(A) = 2$ und wir haben oben gesehen, dass $A$ keine reellen Nullstellen hat.
Für $B := (X - \sqrt{2})$ sieht man das zum Beispiel mit dem Gradsatz so: In einer Zerlegung $B = V\dot{W}$ mit Polynomen $V, W \neq 0$ gilt mit dem Gradsatz

$$1 = \deg(P) = \deg(V) \cdot \deg(W).$$

Da die Grade von $V$ und $W$ nicht-negativ sind, muss also einer der Grade 1 und der andere 0 sein. Also ist $B$ irreduzibel.
Die Zerlegung ist "im Wesentlichen" eindeutig bestimmt in dem Sinne, dass wir die grobe Form der Zerlegung nicht verändern können. Es ist aber möglich, die einzelnen Faktoren zu skalieren, zum Beispiel wäre auch

$$P = (2X - 2\sqrt{2}) \cdot (\frac{1}{2}X^2 - X + 1)$$

eine mögliche Zerlegung. Hier haben wir $B$ mit 2 und $A$ mit $\frac{1}{2}$ multipliziert.

**3. Aufgabe:**

Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und die Abbildung $f : V \to V$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a + 4b + 4c \\ 2b - c \\ b + 2c \end{pmatrix}.$$

Bestimme das charakteristische Polynom von $f$ und entscheide, ob $f$ triangulierbar ist.
Wie ändert sich dieses Ergebnis, falls man $f$ als Endomorphismus des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^3$ auffasst?
*Lösung:* Es bietet sich hier an, die Darstellungsmatrix von $f$ bezüglich der Standardbasis zu betrachten, die kann man nämlich direkt ablesen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von $f$ ist nämlich definiert als charakteristisches Polynom einer beliebigen Darstellungsmatrix, wir können jetzt also das charakteristische Polynom von $A$ bestimmen:

$$\chi_A = \det(xI_n - A) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -4 & -4 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x-2 \end{pmatrix} = (x-1)((x-2)^2+1).$$

Dabei wurde die Determinante mit der Kästchenregel berechnet, da in der ersten Spalte nur der oberste Eintrag nicht-null ist.
Um zu entscheiden, ob $f$ triangulierbar ist, müssen wir jetzt prüfen, ob $\chi_A$ in Linearfaktoren zerfält. Der Linearfaktor $(x-1)$ lässt sich natürlich sofort abspalten und wir müssen nur noch überprüfen, ob auch $P = (x-2)^2 + 1$ zerfällt. Dafür müsste $P$ Nullstellen in $\mathbb{R}$ haben, es gilt aber:

$$\begin{aligned} P = (x-2)^2 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 &= -1 \\ \Leftrightarrow x - 2 &= \pm \mathrm{i} \\ \Leftrightarrow x &= 2 \pm \mathrm{i}. \end{aligned}$$

$P$ hat also keine reellen Nullstellen und $f$ ist nicht triangulierbar.
Als Endomorphismus auf $\mathbb{C}^3$ zerfällt das charakteristische Polynom aber, wir haben ja oben schon 3 Nullstellen gesehen. Also ist $f$ hier triangulierbar.

## 4. Aufgabe:

Zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

als Element von $\mathbb{F}_2^{2\times 2}$ nicht triangulierbar ist, aber als Element von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ schon.
*Lösung:* Wir können direkt das charakteristische Polynom von $A$ ausrechnen:

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & x-1 \end{pmatrix} = x(x-1) - 1 = x^2 - x - 1.$$

Fassen wir dieses Polynom erstmal als Element von $\mathbb{F}_2[X]$ auf. Hier gibt es nur die Elemente 0 und 1 mit $1+1=0$, $0+0=0$ und $0+1=1$. Wir sehen hier insbesondere, dass 1 ihr eigenes additives Inverses ist, also $1=-1$, das Polynom das wir hingeschrieben haben ergibt also auch in $\mathbb{F}_2$ Sinn.
Für die Triangulierbarkeit wollen wir prüfen, ob $\chi_A$ Nullstellen in $\mathbb{F}_2$ hat. Hier können wir einfach 0 und 1 einsetzen, andere Nullstellen kann es ja nicht geben. Es gilt:

1. $\chi_A(0) = 0^2 - 0 - 1 = -1 = 1 \neq 0$
2. $\chi_A(1) = 1^2 - 1 - 1 = \underbrace{1+1}_{=0} + 1 = 0 + 1 = 1 \neq 0.$

Das charakteristische Polynom hat also keine Nullstellen in $\mathbb{F}_2$ und zerfällt damit nicht in Linearfaktoren. Also ist $A$ nicht triangulierbar.
In $\mathbb{R}$ lassen sich die Nullstellen von $\chi_A$ zum Beispiel mit der $p-q$-Formel bestimmen und man erhält

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Damit zerfällt $\chi_A = (x-x_1)(x-x_2)$ in $\mathbb{R}$ und $A$ ist triangulierbar.

# Diagonalisierbarkeit
# Lösungen

**1. Aufgabe:**

Es sei $f \in Hom(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ definiert durch die Bilder der Standardbasisvektoren

$$\begin{aligned} f\left((1,0,0,0)^T\right) &= (2,0,0,0)^T \\ f\left((0,1,0,0)^T\right) &= (0,1,3,0)^T \\ f\left((0,0,1,0)^T\right) &= (0,0,0,5)^T \\ f\left((0,0,0,1)^T\right) &= (0,0,0,1)^T \end{aligned}$$

Zeige:

a) $f$ ist triangulierbar.
Wir stellen zuerst die Darstellungsmatrix $A$ von $f$ bezüglich der Standardbasis auf. Es ist

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

die Darstellungsmatrix. Wir bestimmen nun das charakteristische Polynom. Wir verwenden hierbei, dass die Determinante von Dreiecksmatrizen genau das Produkt der Diagonaleinträge ist. Es ist

$$\chi_A(x) = \det(x \cdot I_4 - A) = \det \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & x & 0 \\ 0 & 0 & -5 & x-1 \end{pmatrix} = (x-2)(x-1)^2 x$$

Wir sehen, dass $\chi_A$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt und damit ist $f$ triangulierbar.

b) $f$ ist weder injektiv, noch surjektiv.
Aus Teilaufgabe a) ist die Darstellungsmatrix $A$ für $f$ bekannt. Wir sehen, dass die Zeilenvektoren der letzten und vorletzten Zeile der Matrix linear abhängig sind. Restlichen Zeilenvektoren sind linear unabhängig. Es ist also

$$\dim(\mathrm{im} f) = r(A) = 3 \neq 4 = \dim \mathbb{R}^4$$

und damit ist $f$ nicht surjektiv. Mit der Dimensionsformel für Homomorphismen folgt nun

$$4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim(\mathrm{im} f) + \dim(\ker f) = 3 + \dim(\ker f) \implies \dim(\ker f) = 1$$

also ist insbesondere $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ und damit ist $f$ nicht injektiv.

c) $f$ ist nicht diagonalisierbar.
Aus Teilaufgabe a) sind die Darstellungsmatrix $A$ von $f$ sowie das charakteristische Polynom $\chi_A = (x-2)(x-1)^2x$ bekannt. Wir bestimmen die Dimension vom Eigenraum zum Eigenwert 1. Es ist

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Eig}(1,f)) &= \dim(\ker(f - 1\cdot id_{\mathbb{R}^4})) = \dim\mathbb{R}^4 - \dim(\mathrm{im}(f - 1\cdot id_{\mathbb{R}^4})\\ &= 4 - r(A - I_4)\\ &= 4 - r\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0\end{pmatrix} = 4-3 = 1\end{aligned}$$

Damit hat der Eigenwert 1 nun die geometrische Vielfachheit 1, aber die algebraische Vielfachheit 2 und $f$ ist nicht diagonalisierbar.

## 2. Aufgabe:

Finde ein Beispiel für ...

a) einen Endomorphismus der diagonalisierbar und bijektiv ist.
Für jeden Vektorraum $V$ ist z.B. $id_V$ ein solcher Endomorphismus.

b) einen Automorphismus, der nicht diagonalisierbar ist.
Sei beispielsweise $A := \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und sei $f \in Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $f(x) = A\cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. $A$ ist die Darstellungsmatrix von $f$ bezüglich der Standardbasis und hat vollen Rang, $f$ ist also ein Automorphismus. Das charakteristische Polynom von $f$ ist $\chi_A(x) = (x-2)^2$, der Eigenraum zu 2 hat aber nur Dimension 1 (lässt sich leicht berechnen), also ist die Abbildung nicht diagonalisierbar.

c) eine Matrix mit den Eigenvektoren $-3$ und 4, die nicht diagonalisierbar ist.
Beispielsweise $A := \begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ ist so eine Matrix. Fassen wir $A$ als Darstellungsmatrix einer Abbildung $f$ auf, so ist das charakteristische Polynom $\chi_A(x) = (x+3)^2(x-4)$, der Eigenraum zum Eigenwert $-3$ hat jedoch nur Dimension 1 (lässt sich leicht berechnen). Die Abbildung ist also nicht diagonalisierbar.

d) eine Matrix mit den Eigenwerten $-3$ und 4 die diagonalisierbar ist.
Beispielsweise jede Diagonalmatrix, auf deren Diagonale 4 und $-3$ stehen ist so eine Matrix.

e) einen diagonalisierbaren, nicht bijektiven Endomorphismus, der nur einen Eigenwert besitzt.
Die Nullabbildung ist in jedem Vektorraum ein solcher Endomorphismus. Insbesondere ist die Nullabbildung aufgefasst als Endomorphismus die einzige Abbildung, die die geforderten Eigenschaften erfüllt.

## 3. Aufgabe:

Seien $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ \frac{7}{3} & 0 & 5\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Zeige, dass $A$ ähnlich ist zu

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und beschreibe anschließend, wie möglichst geschickt $A^{10}$ berechnet werden kann.
Wir definieren $f_A \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $f_A(x) = A{\cdot}x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Wir zeigen zuerst, dass $A$ diagonalisierbar ist. Zuerst berechnen wir die Eigenwerte als die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Wir verwenden die Regel von Sarrus.

$$\chi_A(x) = \det(x \cdot I_3 - A) = \det \begin{pmatrix} x & 0 & -2 \\ -\frac{7}{3} & x & -5 \\ -2 & 0 & x \end{pmatrix} = x^3 - 6x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$$

Wir sehen, dass $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -2, 2\}$ ist und jeder Eigenwert die algebraische Vielfachheit 1 hat. Es ist also $A$ diagonalisierbar, ist also ähnlich zu einer Diagonalmatrix. Wir bestimmen nun für jedes $\lambda \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$ den Eigenraum als $\ker(f - \lambda \cdot id_{\mathbb{R}^3})$. Wir erhalten den Kern jeweils als Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda \cdot I_3) \cdot x = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Lösung der drei Gleichungssysteme liefert

$$\mathrm{Eig}(0, A) = \langle \underbrace{(0,1,0)^T}_{=:v_1} \rangle$$

$$\mathrm{Eig}(2, A) = \langle \underbrace{\left(1, \frac{11}{3}, 1\right)^T}_{=:v_2} \rangle$$

$$\mathrm{Eig}(-2, A) = \langle \underbrace{\left(1, \frac{4}{3}, -1\right)^T}_{=:v_3} \rangle$$

Sei nun $T := (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Dann ist nun

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = B.$$

Wir können nun $A^{10}$ berechnen als

$$A^{10} = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{10 \quad \text{mal}} = T \cdot B \cdot \underbrace{T^{-1} \cdot T}_{=I_3} \cdot B \cdots B \cdot T^{-1} = T \cdot B^{10} \cdot T^{-1}.$$

Das ist geschickt, denn $B^{10}$ lässt sich einfach berechnen, indem die Diagonaleinträge in der Matrix hoch 10 gerechnet werden.

## 4. Aufgabe:

Kreuze jeweils die richtigen Antworten an und begründe bei a) und b)! (mehrfache richtige Antworten möglich)

a) Jede diagonalisierbare Matrix, die nicht 0 als Eigenwert hat, ist auch bijektiv.

- ☐ Ja
- ☒ Nein
  Bijektivität ist für Abbildungen definiert, nicht für Matrizen.

b) Jeder diagonalisierbare Endomorphismus, der nicht 0 als Eigenwert hat, ist auch bijektiv.

- ☒ Ja
  Die Abbildungsmatrix eines solchen Endomorphismus ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix, die keine 0 auf der Diagonalen hat. Diese Matrix hat vollen Rang, der Rang ähnlicher Matrizen ist gleich, und da der Rang der Abbildungsmatrix der Dimension des Bildes der Abbildung entspricht ist der Endomorphismus surjektiv. Damit ist er (über die Dimensionsformel) direkt injektiv und insgesamt bijektiv.
- ☐ Nein

c) Ein Endomorphismus $f$ ist diagonalisierbar genau dann, wenn ...

- ☒ das charakteristische Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt und die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt.
- ☐ jede Darstellungsmatrix von $f$ eine Diagonalmatrix ist.
  Jede Darstellungsmatrix ist ä**hnlich** zu einer Diagonalmatrix, es ist aber nicht jede Darstellungsmatrix selbst eine.
- ☒ es eine Basis aus Eigenvektoren gibt.
- ☐ jeder Eigenwert von $f$ die algebraische Vielfachheit 1 hat.
  Wenn jeder Eigenwert von $f$ die algebraische Vielfacheit 1 hat, dann ist $f$ diagonalisierbar. Dann die geometrische Vielfachheit ist damit nach oben (durch die algebraische Vielfachheit) und unten (Eigenraum mmit Dimension 0 ergibt keinen Sinn) durch 1 begrenzt und damit auch immer gleich 1. Die Gegenrichtung funktioniert jedoch nicht, es ist z.B. $id_{\mathbb{R}^3}$ diagonalisierbar, der Eigenwert 1 hat aber die algebraische Vielfachheit 3.

d) Ein Endomorphismus $f \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit der Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und dem charakteristischen Polynom $\chi_A(x) = (x-2)^2(x+1)$ erfüllt **sicher** die Eigenschaft:

- ☒ $f$ ist triangulierbar.
  Das charakteristische Polynom zerfällt vollständig in Linearfaktoren.
- ☒ $f$ hat die Eigenwerte 2 und $-1$
  Nullstellen von $\chi_A$.
- ☐ $f$ ist diagonalisierbar
  $f$ **kann** in diesem Fall diagonalisierbar sein, muss es aber nicht sein.
- ☒ $f$ hat genau zwei Eigenräume
  Es gibt genau für jeden Eigenwert einen Eigenraum.
- ☒ der Eigenraum von $f$ zum Eigenwert $-1$ hat genau Dimension 1
  Die Dimension eines Eigenraums ist mindestens 1 und nach oben durch die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes, die hier auch 1 ist, begrenzt. Damit ergibt sich hier eine Dimension von 1 für den Eigenraum zu $-1$.
- ☐ jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ ist ein Eigenvektor von $f$

**5. Aufgabe:**

Es sei $A := \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ a-2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Matrix $A$ **sicher** diagonalisierbar ist.

Behauptung: Für alle $a \in \mathbb{R}\backslash\{2,3\}$ ist $A$ sicher diagonalisierbar.
Beweis: Zunächst berechnen wir allgemein das charakteristische Polynom von $A$. Es ist

$$\chi_A(x) = \det(x \cdot I_3 - A) = \det \begin{pmatrix} x-a & 1 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 2-a & 0 & x-2 \end{pmatrix} = (x-a)(x-3)(x-2).$$

Für alle $a \in \mathbb{R}$ schon vollständig in Linearfaktoren. Ist nun $a \in \mathbb{R}\backslash\{2,3\}$, so ist die algebraische Vielfachheit aller Eigenwerte 1 und $A$ ist somit sicher diagonalisierbar (Begründung gab es mehrfach oben). Ist $a \in \{2,3\}$ so gibt es immer einen Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 und es ist nicht sicher, ob $A$ diagonalisierbar ist.